Metodo dei minimi quadrati lineari (MMQL) per una retta come modello

La funzione del modello è una retta (il numero totale di parametri è m=2, e i parametri da determinare sono i due coefficienti c_1 e c_2):

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k \phi_k(x) = \sum_{k=1}^{2} c_k x^{(k-1)} = c_1 . \underbrace{1}_{\phi_1} + c_2 \underbrace{x}_{\phi_2}$$

Per il modello considerato, il sistema di equazioni normali da risolvere per ottenere la soluzione ottimale (ottenuto minimizzando S) è i seguente:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} 1 & \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{N} (x_i)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \end{bmatrix}$$

Questo sistema si può riscrivere più semplicemente come segue:

$$\begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{N} (x_i)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \end{bmatrix}$$

ed ha come soluzione algebrica:

$$D = N \sum_{i=1}^{N} (x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i \right)^2$$

$$c_1 = \left(\left(\sum_{i=1}^{N} y_i \right) . \left(\sum_{i=1}^{N} (x_i)^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i \right) \left(\sum_{i=1}^{N} x_i y_i \right) \right) \frac{1}{D}$$

$$c_2 = \left(N \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i \right) \left(\sum_{i=1}^{N} y_i \right) \right) \frac{1}{D}$$

Esercizio 1:

Il problema fisico considerato in questo problema è definito dall'equazione:

$$F = mg = k(L - L_0)$$

Associando la lunghezza L ad y, e la massa m ad x, l'equazione precedente si può riscrivere come segue:

$$L = m \underbrace{\left(\frac{g}{k} \right)}_{c_2} + \underbrace{L_0}_{c_1}$$

Una volta calcolati c_1 e c_2 con le formule su indicate ad assumendo un valore standard per la costante g, k ed L_0 si possono determinare direttamente dalle equazioni:

$$k = \frac{g}{c_2}$$

$$L_0 = c_1$$