

Formule numeriche per la soluzione di equazioni differenziali  
alle derivate ordinarie (ODE), con condizioni iniziali

Definizioni:

$$y' = f(x, y) \quad e \quad y(x_0) = y_0$$

da cui 
$$y'_m = f(x_m, y_m)$$

Eulero:

$$y_{m+1} = y_m + h \cdot f(x_m, y_m)$$

$$e_T = K \cdot h^2$$

Eulero migliorato (Heun) Runge-Kutta 2-ordine: (medie di tangenti)

$$y_{m+1} = y_m + h \cdot \Phi(x_m, y_m, h)$$

$$\Phi(x_m, y_m, h) = \frac{1}{2} \cdot [f(x_m, y_m) + f(x_m + h, y_m + h \cdot y'_m)] \quad e_T = K \cdot h^3$$

o anche

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2} \cdot (k_1 + k_2)$$

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f\left(x_m + h, y_m + h \cdot k_1\right)$$

Eulero Modificato Runge-Kutta 2-ordine: (punto intermedio)

$$y_{m+1} = y_m + h \cdot \Phi(x_m, y_m, h)$$

$$\Phi(x_m, y_m, h) = f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2} \cdot y'_m\right) \quad e_T = K \cdot h^3$$

o anche

$$y_{m+1} = y_m + h \cdot k_2$$

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2} \cdot k_1\right)$$

Runge-Kutta 4-ordine:

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2} \cdot k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2} \cdot k_2\right)$$

$$k_4 = f\left(x_m + h, y_m + h \cdot k_3\right)$$

$$e_T = K \cdot h^5$$

Criterio di Collatz per cambiare passo:

$$\frac{|k_2 - k_3|}{|k_1 - k_2|} > 200$$

Previsore-Correttore (2 passi o 2-ordine)

$$y_{m+1}^{(p)} = y_{m-1} + 2h \cdot y'_m = y_{m-1} + 2h \cdot f(x_m, y_m)$$

$$y_{m+1}^{(c)} = y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2} \cdot [f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1}^{(p)})] = y_m + \frac{h}{2} \cdot [y'_m + y'_{m+1}^{(p)}]$$

$$e_T = K \cdot h^3 = \frac{1}{5} \cdot [y_{m+1}^{(p)} - y_{m+1}^{(c)}]$$

Previsore-Correttore (4 passi o 4-ordine) (Milne)

$$y_{m+1}^{(p)} = y_{m-3} + \frac{4}{3} \cdot h \cdot (2y'_{m-2} + y'_{m-1} + y'_m)$$

$$y_{m+1}^{(c)} = y_{m-1} + \frac{1}{3} \cdot h \cdot (f(x_{m+1}, y_{m+1}^{(p)}) + 4y'_m + y'_{m-1}) =$$

$$= y_{m-1} + \frac{1}{3} \cdot h \cdot (y'_{m+1}^{(p)} + 4y'_m + y'_{m-1})$$

$$e_T = K \cdot h^5 = \frac{1}{29} \cdot (y_{m+1}^{(p)} - y_{m+1}^{(c)})$$

Integrazione di equazioni differenziali con condizioni iniziali e metodi di Eulero, Runge-Kutta del 4° ordine.

```
Algoritmo Euler(x,y,f,h)
  Parametri Input x,y,f,h
             Output x,y
  y ← y + h·f(x,y)
  x ← x + h
  Exit
  End
```

```
Programma Eulero
  Input a,ya, n,h
  Definizione di f(x,y) o funzione esterna
  x ← a
  y ← ya
  Scrivi intestazione
  Scrivi x,y
  Ciclo1 i:1,...,n
    Euler(x,y,f,h)   (in sostituzione:  y ← y + y·f(x,y)
    Scrivi x,y      x ← x + h          )
  Fine Ciclo1
  Exit
  End
```

```
Algoritmo RK4(x,y,f,h)
  Parametri Input x,y,f,h
             Output x,y
  k1 ← f(x,y)
  k2 ← f(x +  $\frac{h}{2}$ , y +  $\frac{h}{2}$ ·k1)
  k3 ← f(x +  $\frac{h}{2}$ , y +  $\frac{h}{2}$ ·k2)
  k4 ← f(x + h, y + h·k3)

  y ← y +  $\frac{h}{6}$ ·(k1 + 2k2 + 2k3 + k4)
  x ← x + h
  Exit
  End
```

```
Programma Runge-Kutta-4
  Input a,ya, n,h
  Definizione di f(x,y) o funzione esterna
  x ← a
  y ← ya
  Scrivi intestazione
  Scrivi x,y
  Ciclo1 i:1,...,n
    RK4(x,y,f,h)
    Scrivi x,y
  Fine Ciclo1
  Exit
  End
```

Algoritmi a molti passi: Eulero modificato e Milne  
Innesco con metodo di Eulero

Programma Eulero-Modificato-2

Input a, y<sub>a</sub>, n, h

Definizione di (x, y) o algoritmo esterno

x<sub>0</sub> ← a

y<sub>0</sub> ← y<sub>a</sub>

Scrivi intestazione

Scrivi x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>

y<sub>1</sub> ← y<sub>0</sub> + h · f(x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>)

x<sub>1</sub> ← x<sub>0</sub> + h

Scrivi x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>

x<sub>2</sub> ← x<sub>1</sub> + h

y<sub>1</sub>' ← f(x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>)

Ciclo1 i:1, ..., n

y<sup>(p)</sup> ← y<sub>0</sub> + 2h · y<sub>1</sub>'

y = y<sup>(c)</sup> ← y<sub>1</sub> +  $\frac{h}{2}$  · (f(x<sub>2</sub>, y<sup>(p)</sup>) + y<sub>1</sub>' )

Scrivi x<sub>2</sub>, y<sup>(c)</sup>

x<sub>0</sub> ← x<sub>1</sub>

y<sub>0</sub> ← y<sub>1</sub>

x<sub>1</sub> ← x<sub>2</sub>

y<sub>1</sub> ← y<sup>(c)</sup>

x<sub>2</sub> ← x<sub>1</sub> + h

y<sub>1</sub>' ← f(x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>)

Fine Ciclo1

Exit

End

Programma Milne

Input a, ya, n, h

Definizione di f(x,y) o algoritmo esterno

$x_0 \leftarrow a$

$y_0 \leftarrow y_a$

Scrivi intestazione

Scrivi  $x_0, y_0$

$y_1 \leftarrow y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$

$x_1 \leftarrow x_0 + h$

Scrivi  $x_1, y_1$

$y_2 \leftarrow y_1 + h \cdot f(x_1, y_1)$

$x_2 \leftarrow x_1 + h$

Scrivi  $x_2, y_2$

$y_3 \leftarrow y_2 + h \cdot f(x_2, y_2)$

$x_3 \leftarrow x_2 + h$

Scrivi  $x_3, y_3$

$x_4 \leftarrow x_3 + h$

$y_1' \leftarrow f(x_1, y_1)$

$y_2' \leftarrow f(x_2, y_2)$

$y_3' \leftarrow f(x_3, y_3)$

Ciclo1 i:1, ..., n

$y^{(p)} \leftarrow y_0 + \frac{4}{3}h \cdot (2y_1' - y_2' + 2y_3')$

$y = y^{(c)} \leftarrow y_2 + \frac{h}{3} \cdot (f(x_4, y^{(p)}) + 4y_3' + y_2')$

Scrivi  $x_4, y^{(c)}$

$y_0 \leftarrow y_1$

$y_1 \leftarrow y_2$

$y_2 \leftarrow y_3$

$y_3 \leftarrow y^{(c)}$

$x_3 \leftarrow x_4$

$x_4 \leftarrow x_3 + h$

$y_1' \leftarrow y_2'$

$y_2' \leftarrow y_3'$

$y_3' \leftarrow f(x_3, y_3)$

Fine Ciclo1

Exit

End

Algoritmo a 2 passi:

Programma DP

Input a, ya, n, h

Definizione di  $f(x,y)$  o algoritmo esterno

$x_0 \leftarrow a$

$y_0 \leftarrow y_a$

Scrivi intestazione

Scrivi  $x_0, y_0$

$y_1 \leftarrow y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$

$x_1 \leftarrow x_0 + h$

Scrivi  $x_1, y_1$

$x_2 \leftarrow x_1 + h$

$y_1' \leftarrow f(x_1, y_1)$

Ciclo1 i:1, ..., n

$y^{(p)} \leftarrow y_0 + 2h \cdot y_1'$

$y = y^{(c)} \leftarrow y_1 + \frac{h}{2} \cdot (f(x_2, y^{(p)}) + y_1')$

Scrivi  $x_2, y^{(c)}$

$x_0 \leftarrow x_1$

$y_0 \leftarrow y_1$

$x_1 \leftarrow x_2$

$y_1 \leftarrow y^{(c)}$

$x_2 \leftarrow x_1 + h$

$y_1' \leftarrow f(x_1, y_1)$

Fine Ciclo1

Exit

End