

Interpolazione di Lagrange

L'interpolazione di Lagrange e' utilizzata per interpolare funzioni o dati ritenuti senza errore. Supponiamo di volere interpolare $n + 1$ punti (x_i, y_i) ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) con un polinomio $P_n(x)$ di grado n

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \dots = \sum_{i=0}^n a_i x^i.$$

Il polinomio $P_n(x)$ ha $n + 1$ coefficienti a_k . Interpolare un polinomio su un insieme di punti significa che il polinomio dovra' passare attraverso tutti questi punti (x_i, y_i) e questo implica, per ciascun punto x_i , la condizione

$$P_n(x_i) = y_i.$$

Tale condizione su $n + 1$ punti determina un sistema di $n + 1$ equazioni

$$\begin{aligned} P_n(x_0) &= y_0 \\ P_n(x_1) &= y_1 \\ \dots & \\ P_n(x_n) &= y_n \end{aligned} \tag{1}$$

la cui soluzione $\{a_k\}$ consente di determinare il polinomio $P_n(x)$. In forma matriciale il sistema di equazioni $V\vec{a} = \vec{y}$ si scrive

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Il problema ha un'unica soluzione se la matrice non e' singolare, cioe' se il $\det(V)$ e' diverso da zero. E' semplice rendersi conto che la matrice sara' singolare se ha due righe uguali, cioe' se $x_i = x_j$ ($i \neq j$). In generale il determinante si puo' esprimere come

$$\det(V) = \prod_{i,j(i>j)} (x_i - x_j).$$

V^T e' chiamata matrice di Vandermonde, ed e' una matrice per la quale il sistema di equazioni lineari diventa mal condizionato. Una causa del mal condizionamento si puo' attribuire alla ripetuta cancellazione numerica nei prodotti di differenze nel determinante. Il sistema puo' presentare difficolta' se lo si risolve con i metodi tradizionali Lagrange presenta un metodo alternativo, basato sul fatto che se ha soluzione questa e' unica. Proviamo allora a costruire le soluzioni utilizzando un polinomio ausiliario $l_i(x)$ di grado n con le proprieta'

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}. \tag{3}$$

Chiaramente la soluzione cercata si puo' esprimere come

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) y_i$$

dove per la nota proprietà si ha il sistema di equazioni

$$P_n(x_j) = \sum_{i=0}^n \delta_{ij} y_i = y_j$$

corrispondente all'interpolazione sopra riportata. Si tratta di costruire adeguatamente i polinomi $l_i(x)$. La condizione $l_i(x_j) = 0$ per $i \neq j$ si può semplicemente soddisfare con la scelta

$$l_i(x) \propto \prod_{j=0; j \neq i}^n (x - x_j).$$

Con la condizione $l_i(x_i) = 1$ il polinomio deve essere normalizzato e perciò

$$l_i(x) = \frac{\prod_{j=0; j \neq i}^n (x - x_j)}{\prod_{j=0; j \neq i}^n (x_i - x_j)}.$$

Si ha finalmente

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) y_i$$

con

$$l_i(x) = \prod_{j=0; j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

Poiché la soluzione è unica il polinomio è lo stesso che sarebbe risultato dalla soluzione dell'equazione matriciale. Se conosciamo $P_n(x)$ si potrebbero dedurre i valori di a_n anche se questo non è più necessario.