Metodo dei minimi quadrati

Si tratta di approssimare un insieme di dati sperimentali $\{x, y\}$ soggetto a errore di tipo gaussiano, con un insieme di funzioni $\{\phi\}$ (il nostro modello)

La statistica ci dice che dobbiamo fare minima la somma S degli scarti quadratici

$$S = \sum_{i=1}^{N \leftarrow \text{numero di punti}} (y_i - \underbrace{y_c(x_i)}_{\text{valori calcolati}})^2 \qquad y_c(x_i) = \sum_{k=1}^{M} c_k \phi_k(x_i)$$

per trovare la migliore approssimazione compatibile con gli errori gaussiani.

Osservando S vediamo che

i) y_c è lineare relativamente ai parametri c_k della somma

ii) I valori di c_k sono sconosciuti. Li dobbiamo determinare in modo che ~~[illegible]~~ facciano minimo S

iii) S è definita positiva, quindi S minimo equivale a fare

$$dS = 0 \quad \text{nel punto di minimo}$$

ma

$$dS = \frac{\partial S}{\partial c_1} dc_1 + \cdots + \frac{\partial S}{\partial c_M} dc_M = 0$$

Implica

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial c_k} = 0 \qquad \forall k}$$

$$\frac{\partial S}{\partial c_k} = \frac{\partial}{\partial c_k} \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - \sum_m c_m \phi_m(x_i)\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial c_k} \left(y_i - \sum_m c_m \phi_m\right)^2$$

$$= -2 \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - \sum_m c_m \phi_m\right) \phi_k = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} y_i \phi_k(x_i) = \sum_m c_m \sum_{i=1}^{N} \phi_m(x_i) \phi_k(x_i)$$ (M equazioni)

equazioni "normali"

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ eq. matriciale

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} \phi_1^2(x_i) & \cdots & \sum_{i=1}^{N} \phi_1(x_i)\phi_M(x_i) \\ \sum_i \phi_1(x_i)\phi_2(x_i) & \cdots & \sum_{i=1}^{N} \phi_2(x_i)\phi_M(x_i) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_i \phi_M(x_i)\phi_1(x_i) & \cdots & \sum_i \phi_M^2(x_i) \end{pmatrix}}_{\text{matrice "normale"}} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i \phi_1(x_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{N} y_i \phi_M(x_i) \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{M} \vec{c} = \mathbb{V}$$

Vediamo che: i) $\mathbb{V}$ dipende dai valori $\{y\}$, <u>ma $\mathbb{M}$ no</u>.

ii) $\mathbb{M}$ è simmetrica

Un esame più attento di $\mathbb{M}$ e $\mathbb{V}$ rivela che

$$\mathbb{M} = \mathbb{A}^T \mathbb{A}$$

$$\mathbb{V} = \mathbb{A}^T \vec{y}$$

dove

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \phi_1(x_1) & \cdots & \phi_M(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_1(x_N) & \cdots & \phi_M(x_N) \end{pmatrix} \quad \text{è } N \times M$$

e

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \quad \text{è } M \times 1$$

<u>Teo</u> Se le colonne di $\mathbb{A}$ sono LI allora $\mathbb{A}^T \mathbb{A}$ è non singolare e definita positiva.

<u>Inoltre</u>: la soluzione di $\mathbb{M}\vec{c} = \mathbb{V}$ è <u>unica</u>

$\Rightarrow$ Conviene utilizzare Cholesky per risolvere il sist. di eq. normali.