Equazioni differenziali ordinarie

Una equazione del tipo

$$\frac{d^n y}{dx^n} + q_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + q_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + q_n(x) = 0$$

viene chiamata equazione differenziale ordinaria lineare.

C'è la derivata della funzione incognita

$y = y(x)$ dipende da una sola variabile x

tutte le derivate compaiono in modo lineare

Più in generale:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

ordine della equazione = ordine della derivata di maggior ordine

rappresenta una equazione differenziale ordinaria.

Una equazione differenziale ordinaria di ordine n si può anche scrivere, isolando la derivata di maggior ordine, come

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

Teorema Se f è tale che:

a) f è continua relativamente a $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ nel dominio D di variazione degli stessi

b) Possiede derivate parziali continue $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ nel dominio D

Allora esiste ed è unica una soluzione $y = \varphi(x)$

che soddisfa le condizioni

$$y\big|_{x=x_0} = y_0 \quad y'\big|_{x=x_0} = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$$

ove i valori $x = x_0$, $y = y_0$, ..., $y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ sono

compresi in D.

(Valori iniziali: tutte le condizioni sono date nello stesso punto iniziale x_0)

Una equazione di ordine n si può sempre ridurre a un sistema di equazioni differenziali del primo ordine

Esempio: la equazione di secondo ordine

$$\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)\frac{dy}{dx} = r(x)$$

Si può trasformare nel seguente modo

Chiamiamo $\dfrac{dy}{dx} = z(x)$

e quindi $\dfrac{dz}{dx} = r(x) - q(x)\, z(x)$

Due equazioni del primo ordine

Proviamo a risolvere una equazione del primo ordine

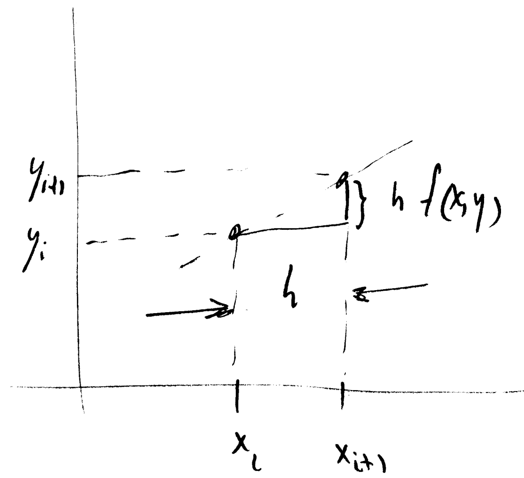
$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \Rightarrow \Delta y = f(x,y)\,\Delta x$$

$$\Rightarrow \underbrace{y_{n+1} = y_n + f(x,y)\, h}_{}$$

Se $x_{n+1} = x_n + \underset{\Delta x}{h}$

Metodi a un passo

Applicazioni dirette :



Metodo di Eulero

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)\,h$$

Si parte da x_0, y_0 (cond iniziali)

e si calcolano successivamente

$x_1 = x_0 + h$

$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)\,h$

$x_2 = x_1 + h$

$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)\,h$

—

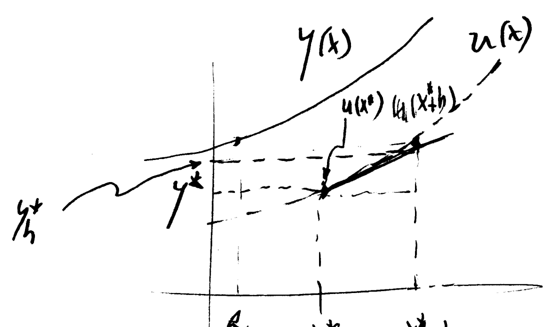
...

Chiaramente l'errore si propaga e si incrementa ad ogni passo.

Per ogni (x^*, y^*) ed $h>0$ L'errore locale (di troncamento) nel punto x^*+h del metodo Φ viene definito come

$$t(x^*, y^*, h) = \frac{1}{h}\left[u(x^*+h) - u(x^*)\right] - \Phi(x^*, u(x^*), h)$$

rappresenta la soluzione della equazione differenziale che parte dal punto x^*, y^*



In questo caso (Eulero)

$$t(x^*, y^*, h) = \frac{1}{h}\left[u(x^*+h) - u(x^*)\right] - f(x^*, y^*)$$

dato che $u'(x^*) = f(x^*, y^*)$

possiamo scrivere

$$t = \frac{1}{h}\left[\underbrace{u(x^*+h)}_{\downarrow} - u(x^*)\right] - u'(x^*)$$

$$u(x^*+h) = u(x^*) + h\,u'(x^*) + \underbrace{\frac{h^2}{2}u''(x^*) + O(h^3)}_{\frac{h^2}{2}u''(\eta) \quad x^* < \eta < x^*+h}$$

$$t = \frac{h}{2}u''(\eta)$$

Metodi più efficienti si possono ottenere riducendo l'errore t il che si ottiene per esempio facendo una combinazioni lineari di valori di f

$$\Phi(x^*, y^*, h) = a_1 k_1 + a_2 k_2$$

$$k_1 = f(x^*, y^*)$$

$$k_2 = f(x^* + bh, y^* + bh k_1)$$

con coefficienti a_1, a_2 e b scelti in modo che lo sviluppo di Taylor di $t(x^*, y^*, h)$ nell'intorno di $(x^*, y^*, 0)$ inizi con la potenza di h più elevata possibile.

Dallo sviluppo di $\Phi(x^*, y^*, h)$ (in h) nell'intorno del punto $(x^*, y^*, 0)$ otteniamo

$$\Phi(x^*, y^*, h) = a_1 f(x^*, y^*) + a_2\left[f(x^*, y^*) + bh\, f_x(x^*, y^*) + bh f(x^*, y^*) f_u(x^*, y^*)\right] + O(h^2)$$

$$= (a_1 + a_2) f(x^*, y^*) + a_2 b\, h \left[\underbrace{f_x(x^*, y^*) + f(x^*, y^*) f_u(x^*, y^*)}_{\frac{d}{dx}\left[f(x,y)\right] \equiv}\right] + O(h^2)$$

I primi termini si annullano in t quando

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 1 \\ a_2 b &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \quad a_2 = \frac{1}{2b} \quad a_1 = 1 - \frac{1}{2b}$$

con $b = 1 \Rightarrow a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ Metodo di Heun

$b = \frac{1}{2} \Rightarrow a_2 = 1 \quad a_1 = 0$ Metodo di Eulero Modificato

o Runge-Kutta del secondo ordine.

Runge - Kutta

Per costruire metodi di ordine superiore si fa

$$\Phi(x^*, y^*, h) = \sum_{i=1}^{r} a_i k_i$$

$$k_1 = f(x^*, y^*)$$

$$k_i = f(x + b_i h, y^* + h \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} k_j) \qquad i = 2, \dots, r$$

donde

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{r} a_i k_i$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_i = f(x_n + b_i h, \; y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} k_j) \qquad i = 2, \dots, r$$

Addizionalmente si impongono le condizioni

$$\sum_{i=1}^{r} a_i = 1$$

e

$$\sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} = b_i \qquad i = 2, \dots, r$$

Runge-Kutta del 4to-ordine

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1)$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + h k_3)$$

Esempio con RK

Funzione esponenziale $y = e^x$

soddisfa la eq. dif. $y' = e^x = y$

con cond. iniz. $y(0) = 1$ $y'(0) = 1$